



## IMPLEMENTAÇÃO DO MODELO VISCOELÁSTICO DE MAXWELL COM ENVELHECIMENTO PARA PROBLEMAS TRIDIMENSIONAIS

**Dianne M. Viana**

Universidade de Brasília, Departamento de Engenharia Mecânica  
Campus Universitário – Asa Norte  
70910-900 – Brasília, DF, Brasil

**Eduardo M. R. Fairbairn**

**Alvaro L. G. A. Coutinho**

COPPE/UFRJ – Universidade Federal do Rio de Janeiro  
Cidade Universitária – Ilha do Fundão  
Cx. P. 68506 – 21945-970 – Rio de Janeiro, RJ, Brasil

***Resumo.** Uma grande classe de materiais com propriedades dependentes do tempo e/ou da frequência pode ser descrita por meio do modelo da cadeia de Maxwell generalizada; tal é o caso dos materiais poliméricos e do concreto massa, comumente empregados em engenharia. O modelo numérico baseado na formulação diferencial representa um avanço em termos de eficiência computacional, quando comparado a outros modelos de simulação do problema reológico. Entretanto, a eficiência para análises tridimensionais pode ser comprometida visto o elevado número de variáveis ("hidden stresses" da cadeia de Maxwell) que deve ser tratado a cada passo de tempo. Para contornar esse problema, propõe-se o uso de um elemento finito sólido trilinear, no qual as forças internas são integradas com um ponto de Gauss, proporcionando uma economia considerável da área de memória usada para o armazenamento das tensões e resultando numa rotina totalmente vetorizada. O elemento é formulado para representar o comportamento viscoelástico linear de um material isotrópico, com envelhecimento de suas propriedades ao longo do tempo.*

***Palavras-chave:** Viscoelasticidade, Elementos finitos, Integração reduzida*

### 1. INTRODUÇÃO

A cadeia de Maxwell generalizada vem sendo amplamente utilizada para a simulação numérica dos efeitos reológicos de materiais viscoelásticos (Bazant, 1974; Fairbairn, 1994; Sydenstricker *et al.*, 1995, Kaliske & Rothert, 1997), uma vez que permite a representação de fenômenos importantes como a relaxação e a fluência com envelhecimento, considerando-se ainda os efeitos do histórico de temperaturas.

Estes fenômenos reológicos devem ser levados em conta quando o comportamento do material for influenciado por ações diferidas, ou seja, que evoluem no tempo, alterando consideravelmente os estados elásticos instantâneos.

Atualmente, são poucos os códigos comerciais de elementos finitos que possuem módulos com modelos numéricos que permitem uma análise reológica com consideração do envelhecimento. Pode-se citar os programas DIANA<sup>TM</sup> e CESAR-LCPC, os quais têm implementado o modelo de Maxwell generalizado.

## 2. MODELO DE MAXWELL

O comportamento viscoelástico linear dos materiais pode ser representado através da analogia com o modelo mola-amortecedor de Maxwell, o qual consiste do elemento de Hooke (mola) e do elemento de Newton (amortecedor) em série, conforme ilustra a Fig. 1(a).

A taxa de deformação para o elemento de Maxwell pode ser escrita como:

$$\dot{\epsilon}(t) = \frac{1}{E} \dot{\sigma}(t) + \frac{1}{\eta} \sigma(t) \quad (1)$$

O fenômeno de relaxação pode ser caracterizado por tensões que variam no tempo quando o elemento é submetido a um estado de deformações impostas. Mantendo-se essas tensões constantes ao longo do tempo,  $\epsilon(t) = \epsilon(0) = \epsilon$ , e integrando-se a Eq. (1),

$$\sigma(t) = E\epsilon e^{-t/\tau} \quad (2)$$

onde  $\tau = \frac{\eta}{E}$  é o índice de relaxação. O termo  $Ee^{-t/\tau}$  é a função de relaxação  $R(t)$ .

O modelo reológico de Maxwell generalizado encontra-se representado na Fig. 1(b) através de um número finito de elementos de Maxwell em paralelo com um elemento de Hooke. A resposta em termos de relaxação é dada por:

$$\sigma(t) = \epsilon \left[ \sum_{\mu=1}^{n-1} E_{\mu} e^{-t/\tau_{\mu}} \right] + E_{\infty} \epsilon \quad (3)$$

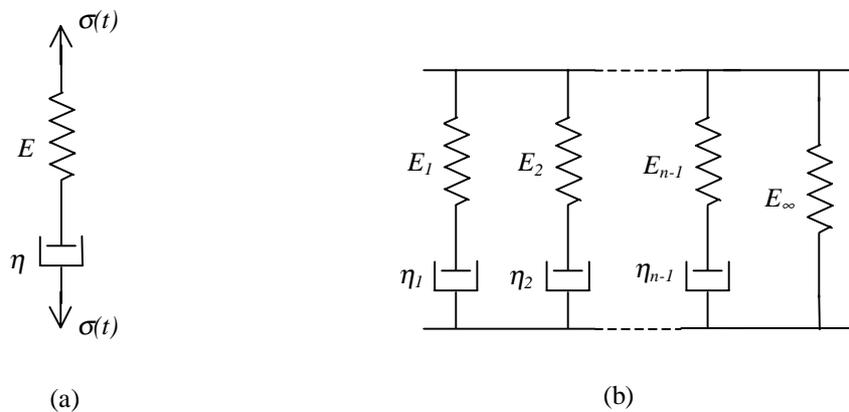


Figura 1 - (a) modelo de Maxwell, (b) modelo de Maxwell generalizado em paralelo.

As expressões até aqui consideram que os coeficientes elásticos  $E_\mu$  e os coeficientes de viscosidade  $\eta_\mu$  são constantes ao longo do tempo. Em alguns materiais, as propriedades mecânicas evoluem em função do tempo, sendo caracterizado o processo de envelhecimento.

### 3. IMPLEMENTAÇÃO DO MODELO VISCOELÁSTICO DE MAXWELL

Os modelos numéricos para solução de problemas viscoelásticos podem ser desenvolvidos com base nas formulações integral ou diferencial. Na formulação integral, o equacionamento é feito através de integrais de Volterra ou de convolução que são resolvidas a cada incremento de tempo. A maior desvantagem no uso desta formulação é a necessidade do conhecimento de toda a história de tensões. A implementação de um algoritmo baseado na formulação integral para problemas viscoelásticos envolve um grande número de variáveis que precisam ser armazenadas para todos os passos de tempo avaliados, inviabilizando a análise. A formulação diferencial, nesse sentido, representa um avanço em termos de eficiência computacional uma vez que requer o armazenamento apenas das tensões do passo de tempo anterior.

Usando-se a resposta em termos de tensões, tomando-se como base o problema da relaxação para o caso tridimensional,

$$\{\sigma(t)\} = R(t, t') [D^*] \{\varepsilon(t')\} \quad (4)$$

onde,  $[D^*]$  é a matriz constitutiva de elasticidade modificada<sup>1</sup>,  $t'$  define o tempo em que o carregamento é aplicado,  $\{\varepsilon(t')\}$  é o vetor de deformações. A função de relaxação  $R(t, t')$  pode ser expandida em uma série de Dirichlet do tipo:

$$R(t, t') = \sum_{\mu=1}^n E_\mu(t') e^{-\frac{t-t'}{\tau_\mu}} = \sum_{\mu=1}^{n-1} E_\mu(t') e^{-\frac{t-t'}{\tau_\mu}} + E_\infty(t') \quad (5)$$

O vetor de tensões na Eq. (4) pode ser dado em função das tensões atuantes em cada termo da cadeia de Maxwell,

$$\sigma(t) = \sum_{\mu=1}^n \sigma_\mu(t) \quad (6)$$

Levando-se em conta o princípio de superposição de Boltzmann, as tensões na Eq. (6) podem ser aplicadas em incrementos de tempo. Ainda, são estabelecidas aproximações dentro do intervalo de tempo  $[t_r, t_{r-1}]$ : Os coeficientes elásticos dos elementos de Maxwell,  $E_\mu$ , são constantes dentro do intervalo, calculados com base no valor médio  $t_{r-1/2}$  (Viana, 1998). Essas considerações levam à obtenção da equação constitutiva na forma incremental, Eq. (7), e à obtenção da expressão de tensão para cada termo da cadeia de Maxwell, Eq. (10),

$$\{\Delta\sigma(t_r)\} = E''(t_r) [D^*] \left( \{\Delta\varepsilon(t_r)\} + \{\Delta\varepsilon^c(t_r)\} \right) \quad (7)$$

sendo que,

---

<sup>1</sup>  $[D^*]$  é a matriz constitutiva de elasticidade dividida pelo módulo de elasticidade unitário.

$$\Delta \varepsilon^c(t_r) = \frac{1}{E''(t_r)} \sum_{\mu=1}^n \left[ \sigma_{\mu}(t_{r-1}) \left( 1 - e^{-\frac{\Delta t_r}{\theta_{\mu}}} \right) \right] \quad (8)$$

O fenômeno de envelhecimento é caracterizado pela evolução do módulo  $E''$  no tempo, onde,

$$E''(t_r) = \sum_{\mu=1}^n \left[ \frac{\tau_{\mu}}{\Delta t} \left( 1 - e^{-\frac{\Delta t_r}{\tau_{\mu}}} \right) E_{\mu}(t_{r-1/2}) \right] \quad (9)$$

$$\left\{ \sigma_{\mu}(t_r) \right\} = \left\{ \sigma_{\mu}(t_{r-1}) \right\} e^{-\frac{\Delta t_r}{\tau_{\mu}}} + [D^*] \frac{\tau_{\mu}}{\Delta t} \left( 1 - e^{-\frac{\Delta t_r}{\tau_{\mu}}} \right) E_{\mu}(t_{r-1/2}) \{ \Delta \varepsilon(tr) \} \quad (10)$$

Sydenstricker *et al.* (1995) apresentam a modelagem da cadeia de Maxwell para problemas viscoelásticos usando um elemento finito de quatro nós. A matriz de rigidez do elemento viscoelástico é dada pela Eq. (11) e o vetor de incrementos de forças internas pela Eq. (12):

$$[K^e(t_r)] = \int_v [B]^T E''(t_r) [D^*] [B] dv \quad (11)$$

$$\{ \Delta R^e(t_r) \} = \int_v [B]^T E''(t_r) [D^*] \{ \Delta \varepsilon^c(t_r) \} dv \quad (12)$$

Mesmo representando um avanço em relação à formulação integral, a eficiência para análises tridimensionais em larga escala pode ser ainda comprometida visto o elevado número de variáveis que deve ser tratado a cada passo de tempo. Sydenstricker *et al.* (1995) apresentam um procedimento no qual elementos da cadeia de Maxwell podem ser desativados durante a análise. Por outro lado, no presente trabalho é usado um elemento finito sólido trilinear, adequado à computação de alto desempenho, no qual as forças internas são integradas com um ponto de Gauss. Nesse caso, os cálculos podem ser vetorizados e paralelizados sobre o número de elementos finitos. Os termos da cadeia de Maxwell são desacoplados, significando que os cálculos realizados em um elemento da cadeia de Maxwell independem daqueles realizados no próximo elemento. Para cada termo da cadeia de Maxwell, é calculado e acumulado um componente das forças internas e, ao final do laço, o vetor de forças internas do sistema global é obtido. O algoritmo para cálculo do vetor de forças internas é mostrado no Quadro 1.

O uso da quadratura de um ponto gera uma instabilidade na malha conhecida como "hourglass". A técnica adotada para controle dessa instabilidade foi proposta por Belytschko *et al.* (1984).

A resposta viscoelástica é obtida pela aplicação do carregamento em passos de tempo. A cada passo é resolvido um sistema de equações lineares representado por:

$$\left( \sum_{e=1}^n [K^e(t_r)] \right) \{ \Delta u(t_r) \} = \sum_{e=1}^n \{ \Delta b^e(t_r) \} \quad (13)$$

O vetor de cargas efetivas é determinado segundo

$$\{\Delta b(t_r)\} = \{\Delta F(t_r)\} - \{\Delta R(t_r)\} + \{\Delta F^{HG}(t_r)\}$$

onde  $\{\Delta F(t_r)\}$  é o vetor de forças externas,  $\{\Delta R(t_r)\}$  é o vetor de forças internas e  $\{\Delta F^{HG}(t_r)\}$  é o vetor de forças *anti-hourglass*. Por conveniência esses vetores são armazenados em sua representação global.

Para a solução do sistema de equações é utilizado o método de gradientes conjugados pré-condicionado associado à técnica de decomposição elemento-por-elemento (Viana, 1998).

Quadro 1 - Algoritmo de cálculo do vetor de forças internas do elemento viscoelástico tridimensional com um ponto de integração.

Para cada elemento  $\mu$  da cadeia de Maxwell

1. Obter coordenadas, tipo do material e parâmetros do modelo de Maxwell ( $C_{\mu k}$  e  $\tau_\mu$ )
2. Calcular coeficientes de elasticidade dos elementos da cadeia de Maxwell
3. Calcular  $E_\mu(t_{r-1/2})$
4. Calcular  $E''(t_r)$
5. Armazenar componentes da matriz constitutiva de elasticidade  $d_i = E''(t_r)d_i^*$
7. Calcular componentes de deformação  $\Delta \varepsilon_i = B_{il} \Delta u_l$
8. Calcular componentes de tensão  $\sigma_{\mu p}(t_{r-1})$
9. Armazenar valores do tempo anterior  $E''(t_r)$ ,  $\sigma_{\mu p}(t_{r-1})$
10. Calcular componentes de deformação viscosa  $\Delta \varepsilon^c(t_r)$
11. Calcular e acumular os componentes do vetor de forças internas  $\{\Delta R^e(t_r)\}$
12. Acumular os componentes da matriz constitutiva de elasticidade

Fim (elemento  $\mu$  da cadeia de Maxwell)

#### 4. EXEMPLOS NUMÉRICOS

Seja a barra carregada à compressão submetida a um ensaio de fluência, conforme ilustra a Fig. 2(a). A mesma é discretizada em 32 elementos sólidos de 8 nós, sendo aplicada uma tensão constante de 5 MPa em sua extremidade superior a partir da idade de 28 dias. Sydenstricker *et al.* (1995) apresentam a solução desse exemplo para o caso bidimensional utilizando elementos de membrana triangulares de 3 nós.

O comportamento viscoelástico do material é representado por uma cadeia de Maxwell de 5 elementos. A função proposta por Bazant (1982) para o cálculo dos coeficientes elásticos do modelo reológico generalizado é:

$$E_\mu(t_r) = C_{\mu 1} + C_{\mu 2} \log_{10}(1 + t_r) + C_{\mu 3} (\log_{10}(1 + t_r))^2 + C_{\mu 4} (\log_{10}(1 + t_r))^3 \quad (14)$$

onde  $t$  é dado em dias.

Os parâmetros  $C_{\mu k}$ ,  $k = 1, \dots, 4$ , e  $\tau_\mu = \eta_\mu / E_\mu$  definem a variação ao longo do tempo do módulo de deformação longitudinal  $E_\mu$  e do coeficiente de viscosidade  $\eta_\mu$  de um elemento da

cadeia de Maxwell. Os valores  $C_{\mu k}$  e  $\tau_{\mu}$ , obtidos a partir de ensaios de fluência em corpos de prova de concreto, constam na Tabela 1.

O coeficiente de Poisson adotado foi de 0,22 e a tolerância utilizada para convergência do método dos gradientes conjugados foi de  $1,0 \times 10^{-6}$ .

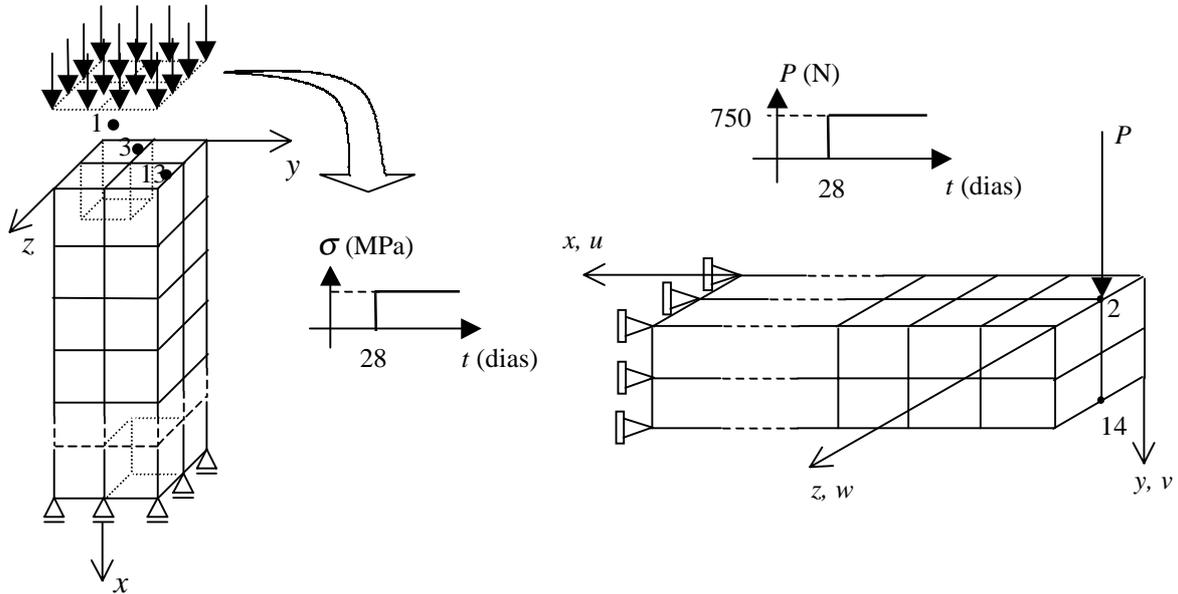


Figura 2 - Representação dos carregamentos atuando na extremidade da barra de dimensões 800mm x 100mm x 100 mm, discretizada com 32 elementos.

Tabela 1 - Parâmetros que definem a variação do módulo de deformação longitudinal  $E_{\mu}$  e do coeficiente de viscosidade  $\eta_{\mu}$  ao longo do tempo.

$\mu$	$C_{\mu 1}$ (MPa)	$C_{\mu 2}$ (MPa)	$C_{\mu 3}$ (MPa)	$C_{\mu 4}$ (MPa)	$\tau_{\mu}$ (dias)
1	1829,70500	915,71960	-733,57870	43,53036	0,10
2	4772,25400	-58,72546	171,00370	-265,32790	1,00
3	6340,31000	-1441,55800	1356,70200	-476,76110	10,00
4	5550,99000	-701,72160	617,69360	-174,12150	100,00
5	3910,13900	1567,00700	-1599,00600	924,50200	$1,0 \times 10^{31}$

Fonte: Sydenstricker (1995).

Na Fig. 3 são mostrados os deslocamentos dos nós 1, 3 e 13 na direção  $x$ .

Os valores obtidos para os deslocamentos na idade de aplicação do carregamento  $t' = 28$  dias correspondem à deformação elástica linear para o carregamento aplicado.

Os resultados para este exemplo reproduzem a solução com o *software* DIANA™ através do método de Newton e utilizando a integração de Gauss  $2 \times 2 \times 2$ , com quatro algarismos significativos.

Apesar do vetor de forças internas ser integrado com um ponto de Gauss, os modos *hourglass* não foram excitados neste caso. Em razão das propriedades de ortogonalidade entre esses modos e os modos de deformação lineares, assumindo-se quaisquer valores para os parâmetros de controle viscoso  $\xi$  ou elástico  $\kappa$  não ocorre alteração da solução.

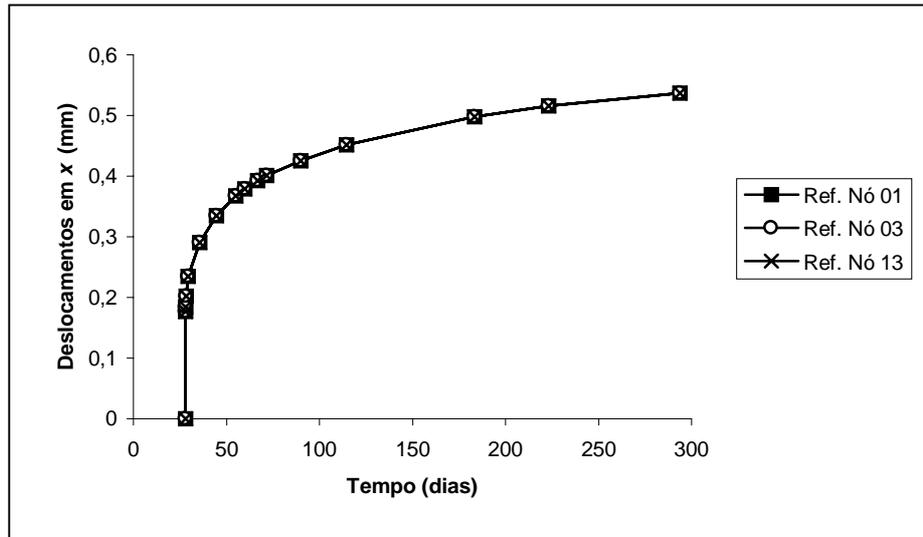


Figura 3 - Deslocamentos dos nós 1, 3 e 13 na direção  $x$ .

Considerando-se agora uma viga engastada com um carregamento aplicado em sua extremidade, conforme representado na Fig. 2(b), e utilizando-se os mesmos dados do exemplo anterior para a solução reológica, são mostrados nas Figs. 4 e 5 os deslocamentos do nó 14 na direções  $x$  e  $y$ , respectivamente. Adotou-se um valor do coeficiente viscoso  $\xi = 0,040$  obtendo-se resultados bem próximos da curva de referência, que corresponde a solução numérica com integração  $2 \times 2 \times 2$ . Cabe observar que o programa ABAQUS adota o valor  $\xi = 0,05$  como parâmetro padrão para as suas análises (Abaqus, 1994).

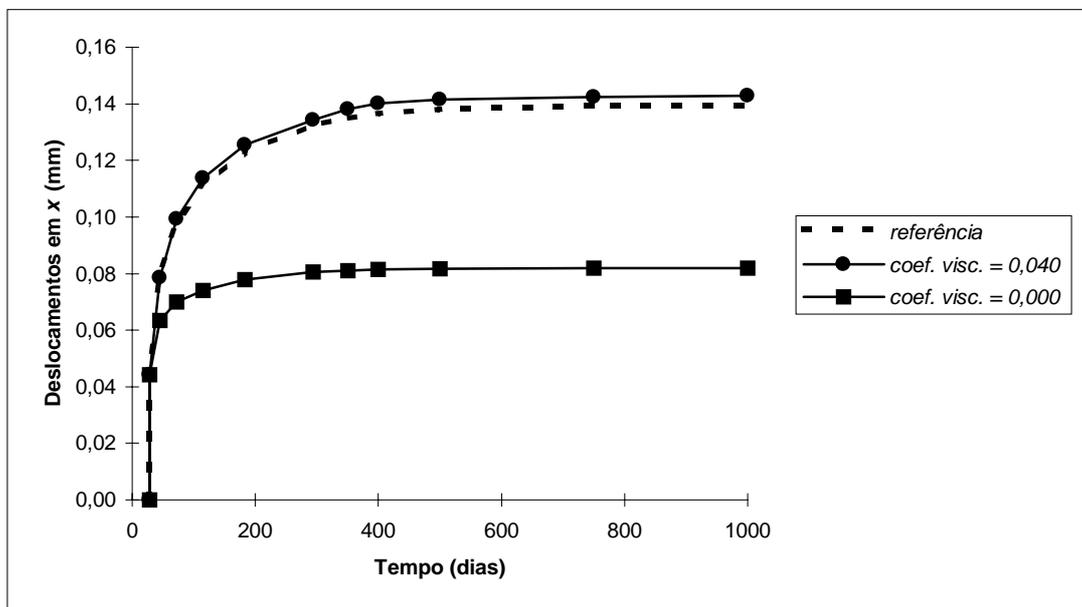


Figura 4 - Deslocamentos do nó 14 na direção  $x$  para diferentes valores do coeficiente viscoso  $\xi$ .

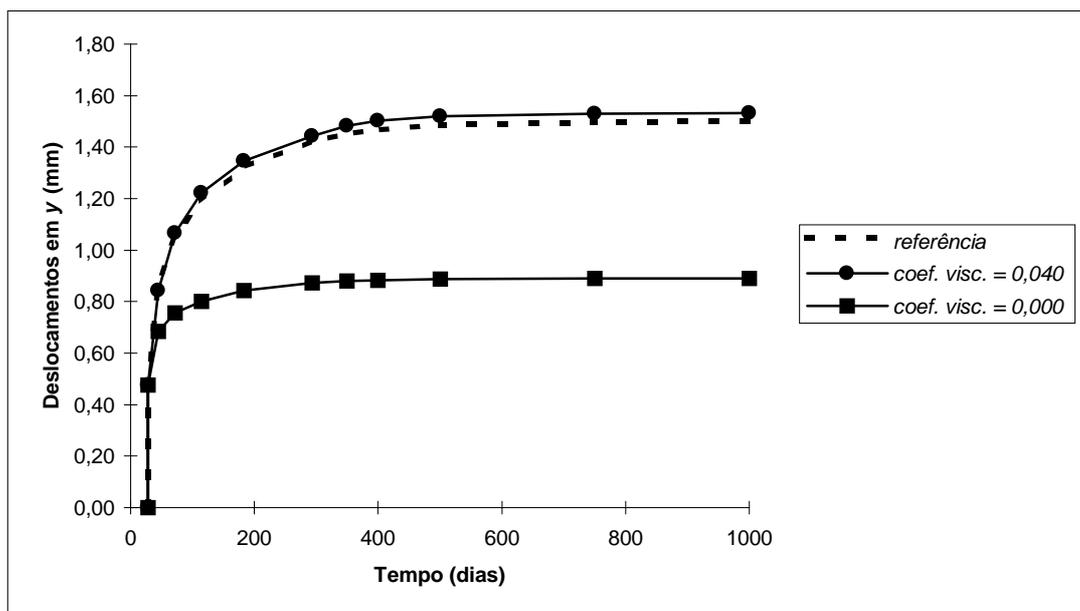


Figura 5 - Deslocamentos do nó 14 na direção y para diferentes valores do coeficiente viscoso  $\xi$ .

Para melhor avaliação das vantagens do uso da quadratura de um ponto para o vetor de forças é feita a comparação com os resultados obtidos de uma versão do mesmo programa com integração  $2 \times 2 \times 2$  do vetor de forças internas e da matriz de rigidez. Nos dois casos, utilizando-se o exemplo da barra comprimida, discretizado desta vez com  $32 \times 32 \times 64$  elementos sólidos de 8 nós, a análise de fluência foi realizada numa máquina CRAY J90™ considerando-se a mesma evolução no tempo do referido exemplo, obtendo-se os mesmos resultados da Fig. 3 para os nós 1, 544 e 1089 correspondentes. Outros dados são fornecidos na Tabela 2, a seguir:

Tabela 2 - Dados do exemplo da barra comprimida.

Número de elementos	65536
Número de nós	70785
Número de equações	211264
Tolerância para convergência do método dos gradientes conjugados	$10^{-6}$
Número de passos de tempo	7
Número de blocos	8
Número de elementos por bloco	8192
Número médio de iterações do método dos gradientes conjugados	355

Os resultados obtidos através das ferramentas do CRAY J90™ encontram-se descritos na Tabela 3.

Tabela 3 - Resultados das etapas de otimização do código para um único processador.

Código	Características	$MIPS^2$	$Mflop/s^3$	Tempo de CPU (s)	Ganho Relativo de Tempo	Demanda de Memória ( $Mwords^4$ )
Versão 1	Integração 2 x 2 x 2 do vetor de forças internas.	13,0	17,5	10906,8	1,0	63,3
Versão 2	1 ponto de integração no vetor de forças internas.	7,6	73,2	2451,8	4,4	33,5

O uso da quadratura de 1 ponto representou um ganho de CPU de 4,4 vezes.

A redução da taxa do número de instruções por segundo,  $MIPS$ , assim como o aumento da taxa de operações com números de ponto flutuante por segundo,  $Mflop/s$ , são indicativos da maior eficiência conseguida com a vetorização do código.

A variação na demanda de memória, que na versão 1 é de 63,3  $Mwords$  e na versão 2 é de 33,5  $Mwords$ , pode ser justificada pela redução da área de armazenamento das tensões  $\sigma_\mu(t)$  e  $\sigma_\mu(t-1)$ . Na versão 1, há a necessidade de armazenar  $nter \times ncomp \times nint \times nel$  variáveis, onde  $nter$  é o número de elementos da cadeia de Maxwell,  $ncomp$  é o número de componentes do vetor,  $nint$  é o número de pontos de integração e  $nel$  é o número de elementos. Na versão 2, em função do uso da integração com 1 ponto de Gauss, a área de armazenamento das tensões é 8 vezes menor.

## 5. CONCLUSÕES

Além da redução significativa do tempo de CPU, ficou evidenciado que a maior contribuição do uso da quadratura de um ponto para integração do vetor de forças internas foi a redução considerável da área de memória devido ao armazenamento das tensões. Em vista desses resultados obtidos, o uso de um modelo adaptativo no tempo para a cadeia de Maxwell, como propõem Sydenstricker *et al.* (1995), perde a sua importância no desempenho geral do programa quando executado no CRAY™.

## AGRADECIMENTOS

Ao CESUP/UFRGS pelo uso do programa DIANA™ e ao NACAD/COPPE/UFRJ pelo uso do sistema CRAY J90™.

## REFERÊNCIAS

- Abaqus, 1994, Abaqus User's Manual, Version 5.4, U.S.A..
- Bazant, Z. P., 1974, Rate-type creep law of aging concrete based on Maxwell chain, *Material and Structures*, vol. 7, n. 37, pp. 45-60.
- Bazant, Z. P., 1982, Input for creep and shrinkage characteristics for structural analysis program, *Materials and Structures*, vol. 15, n. 88., pp. 283-290.

<sup>2</sup>  $MIPS$  indica uma taxa de milhões de instruções por segundo.

<sup>3</sup>  $Mflop/s$  indica uma taxa de milhões de operações com números de ponto flutuante por segundo.

<sup>4</sup>  $Mword$  é a unidade de medida que indica milhões de palavras.

- Belytschko, T., Ong, J. S.-J., Liu, W. K., Kennedy, J. M., 1984, Hourglass control in linear and nonlinear problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier Science Publishers B. V. (North-Holland), n. 43, pp. 251-276.
- Fairbairn, Eduardo M. R., 1994, L'expérience brésilienne dans l'utilisation du modèle rhéologique de la chaîne de Maxwell pour la résolution du problème thermo-mécanique des barrages en béton, *Annales de L'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics*, Société d'Éditions du Bâtiment et des Travaux Publics - SEBTP (SARL), Janvier, France, n. 520, pp. 149-180.
- Kaliske, M., Rothert, H., 1997, Formulation and implementation of three-dimensional viscoelasticity at small and finite strains. *Computational Mechanics*, Springer-Verlag, v. 19, pp. 228-239.
- Sydenstricker, R. M., Fairbairn, E. M. R., Coutinho, A. L. G. A., 1995, Modelo da cadeia de Maxwell adaptativo para materiais viscoelásticos com envelhecimento, XVI CILAMCE, Curitiba, v. 1, pp. 168-176.
- Viana, D. M., 1998, Simulação Paralela de Problemas Viscoelásticos em Estruturas de Concreto Massa, (Tese de Doutorado). COPPE/UFRJ, Programa de Engenharia Civil, Rio de Janeiro, 120 p.

***Title.*** *Implementation of the Maxwell Viscoelastic Model with Aging for Tridimensional Problems.*

***Abstract.*** *A great class of materials with time and/or frequency dependent properties can be described by the generalized Maxwell chain model. Examples of that are polymeric materials and mass concrete, usually used in engineering. The numerical model based on the differential formulation represents a computational improvement compared to other models for the simulation of reologic problems. Face to the large number of variables ("hidden stresses" of the Maxwell chain) that needs to be treated in each step, the efficiency for tridimensional analysis can be problematic. In order to avoid that problem, the use of a solid trilinear finite element is proposed, in which the internal forces are integrated by one Gauss point, resulting in a reduced waste of memory to save the stress values and also resulting in a completely vectorized routine. The element is formulated to present the linear viscoelastic behavior of an isotropic material considering the aging of its properties.*

***Keywords:*** *Viscoelasticity, Finite elements, Reduced integration.*